Université Saâd Dahlab - Blida 1 | Faculté des Sciences
2020/2021 | Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation doctorale

Filière : Mathématiques

Épreuve 1 : Analyse et topologie, Durée : 1h30

Exercice 1 (6 points)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2 (7 points)

Pour tout réel positif x on pose :

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et calculer leurs dérivées. On ne cherchera pas à calculer les intégrales qui interviendront.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 3 (7 points)

On considère (E,d) tel que $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ et

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^\pi (f(t)-g(t))^2 dt}.$$

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de E définie par $f_n(x) = \sin(nx)$.

1. Montrer que (E,d) est un espace métrique.
2. Calculer $d(f_n,0)$, $n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet aucune valeur d'adhérence.
4. En déduire que E n'est pas localement compact.